

Cours 8 : Stabilité de Liapounov

La théorie de stabilité a pour but l'étude du comportement des solutions d'une équation différentielle lorsque $t \rightarrow \infty$, dans une situation perturbée.

Deux types de perturbations du problème de Cauchy

$$(PC) \quad x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0,$$

peuvent être envisagés :

- (i) perturbation de la donnée initiale x_0 ;
- (ii) perturbation de l'équation, i.e. de la fonction f .

Dans le cadre de ce cours, nous ne considérons que le type (i) - L'équation

$$(E) \quad x' = f(t, x)$$

est donc fixée une fois pour toutes, par la donnée d'une fonction $f \in C^0([0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Les définitions fondamentales sont les suivantes.

Définition 8.1 : Soit $\phi(t)$ une solution de (E) définie sur un intervalle $[t_*, \infty)$, $t_* \geq 0$. On note $x(t; t_0, x_0)$ une solution de (E) avec CI $x(t_0) = x_0$, où $t_0 \geq t_*$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

(a) On dit que ϕ est stable (au sens de Liapounov) si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall t_0 \geq t_* \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0 \quad \text{t.q.}$$

$$|x_0 - \phi(t_0)| < \delta \Rightarrow |x(t; t_0, x_0) - \phi(t)| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0.$$

(b) On dit que ϕ est uniformément stable si ϕ est stable et qu'on peut choisir δ indép. de t_0 .

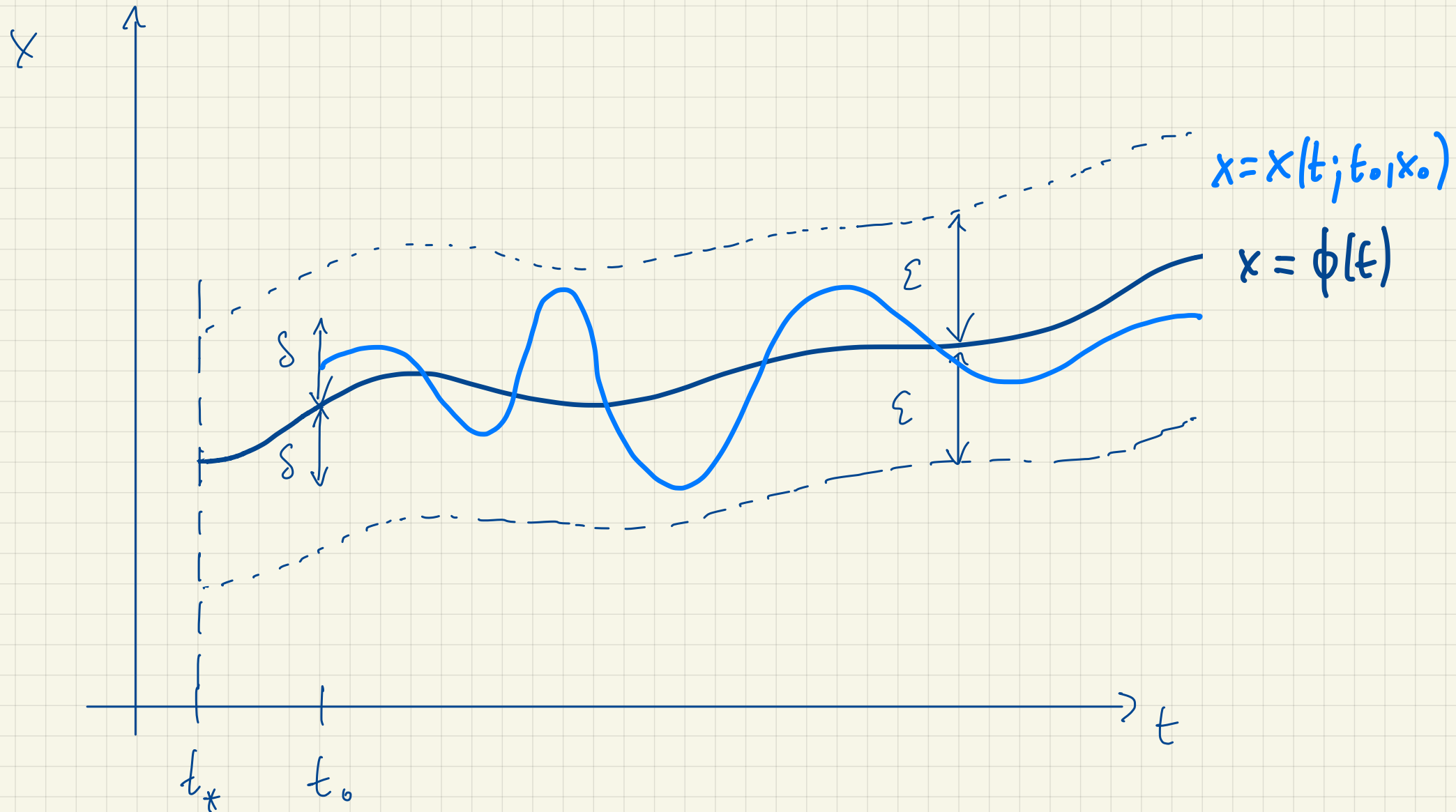
(c) On dit que ϕ est asymptotiquement stable si ϕ est stable et

$$\forall t_0 \geq t_* \quad \exists \delta_1 = \delta_1(t_0) \quad \text{t.q.}$$

$$|x_0 - \phi(t_0)| < \delta_1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} |x(t; t_0, x_0) - \phi(t)| = 0.$$

(d) On dit que ϕ est instable si ϕ n'est pas stable.

$\phi(t)$ solution stable de $x' = f(t, x)$



Remarque 8.1 : (i) Asympt. stable $\Rightarrow$ stable.

(ii) Posant $y(t) = x(t) - \phi(t)$, on voit que y satisfait

$$\begin{aligned} (E^{\sim}) \quad y' &= x' - \phi' = f(t, x) - f(t, \phi) \\ &= f(t, y + \phi) - f(t, \phi) =: g(t, y), \end{aligned}$$

avec la CI $y(t_0) = x(t_0) - \phi(t_0)$.

La solution $y \equiv 0$ de $(E^{\sim})$ correspond à $x(t) \equiv \phi(t)$.

Par ailleurs, la distance de $x(t)$ à $\phi(t)$ est donnée

par $|x(t) - \phi(t)| = |y(t)| = |y(t) - 0|$. Ainsi,

la stabilité de ϕ pour l'équation (E) équivaut à

la stabilité de la solution nulle pour $(E^{\sim})$.

Exemple 8.1: Considérons l'équation scalaire

$$(8.1) \quad x' = kx, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Clairément, $x \equiv 0$ est solution. La solution de (8.1) correspondant à la $(I \ x(t_0) = x_0$ est donnée par $x(t) = x_0 \exp(k(t-t_0))$. On montre facilement que

(i) $x \equiv 0$ est uniformément et asymptotiquement stable si $k < 0$ [$|x_0| < \varepsilon \Rightarrow |x_0 e^{k(t-t_0)}| < \varepsilon$];

(ii) $x \equiv 0$ est uniformément stable mais pas asympt. stable si $k = 0$;

(iii) $x \equiv 0$ est instable si $k > 0$.

Exemple 8.2 : Pour l'équation scalaire

(8.2)

$$x' = x^2,$$

nous avons à nouveau la solution nulle $x \equiv 0$.

Pour la CI $x(t_0) = x_0 \neq 0$, la solution de (8.2) est

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0(t - t_0)}.$$

Si $x_0 > 0$, $x(t)$ est définie sur l'intervalle $[t_0, T)$ avec $T = x_0^{-1} + t_0$, et on a $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow T^-} \infty$.

Si $x_0 < 0$, $x(t)$ est définie sur $[t_0, \infty)$ et $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$. On conclut que $x \equiv 0$ est instable.

On considère maintenant l'équation autonome

(A)

$$x' = f(x),$$

où $f \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Le lemme suivant découle de l'observation que si $x(t)$ est solution de (A) sur (a, b) , alors $x(t+\alpha)$ est solution de (A) sur $(a+\alpha, b+\alpha)$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ (cf. exos).

Lemme 8.1: La solution nulle $x \equiv 0$ de (A) est stable si et seulement si elle est uniformément stable.

Définition 8.2: On dit que $a \in \mathbb{R}^n$ est un point stationnaire (ou point d'équilibre) de (A) si $f(a) = 0$. Dans ce cas, $x(t) \equiv a$ est

une solution constante de (A), définie sur $\mathbb{R}$.

Remarque 8.2: Posant $y(t) = x(t) - a$, on voit que $y(t)$ satisfait l'équation autonome

$$(\tilde{A}) \quad y' = g(y) := f(y+a).$$

Alors le point stationnaire $y(t) \equiv 0$ a les mêmes propriétés de stabilité pour l'équation $(\tilde{A})$ que celles de $x(t) \equiv a$ pour l'équation (A).

Afin d'obtenir des résultats généraux sur la stabilité des solutions de (A), il est utile d'étudier d'abord le cas linéaire.

Stabilité des solutions d'équations linéaires

Nous considérons les équations (pas nécessairement autonomes)

$$(H) \quad x' = A(t)x,$$

$$(NH) \quad x' = A(t)x + f(t),$$

avec $A \in C^0([0, \infty), \mathbb{R}^{n \times n})$, $f \in C^0([0, \infty), \mathbb{R}^n)$.

Par le théorème 5.1, les solutions de (H) et (NH) existent sur tout l'intervalle $[0, \infty)$.

Lemme 8.2 : Toute solution de (H) ou (NH) a la même stabilité que la solution nulle pour (H).

Preuve: Tout d'abord, la remarque 8.1 avec

$$f(t, x) = A(t)x \hookrightarrow y' = f(t, y+\phi) - f(t, \phi) = A(t)y$$

$\Rightarrow$ toute solution de (H) a la même stabilité que $\phi \equiv 0$.

Soit maintenant $\phi(t)$ une solution de (NH). Soit

$x(t)$ une autre solution qq de (NH). Alors

$y(t) := x(t) - \phi(t)$ est une solution de (H). De

plus, la distance de $x(t)$ à $\phi(t)$ est donnée

par $|x(t) - \phi(t)| = |y(t)| = |y(t) - 0|$. Ainsi,

la stabilité de ϕ pour l'équation (NH) équivaut à

la stabilité de la solution nulle pour (H). #

Remarque 8.3: Le lemme 8.2 indique que la stabilité

des solutions de (NH) est indépendante du terme de source $f(t)$. Il suffit donc de considérer la stabilité des solutions de (H) . De plus, comme toutes les solutions de (H) ont la même stabilité, on peut parler de la stabilité de (H) .

Théorème 8.1 : Soit $X(t)$ une matrice fondamentale de (H) et soit $Y(t, t_0)$ la matrice principale de (H) à $t_0 \geq 0$. On a alors les résultats suivants :

(a) (H) est stable $\Leftrightarrow \exists k > 0 \quad \forall t \geq 0, |X(t)| \leq k$;

(b) (H) est unif. stable $\Leftrightarrow$

$\exists M > 0 \quad \forall 0 \leq t_0 \leq t, |Y(t, t_0)| \leq M$.

(c) (H) est asympt. stable $\Leftrightarrow X(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$.

Preuve : Exercice

Nous allons maintenant appliquer le théorème 8.1 pour obtenir des critères de stabilité généraux pour l'équation à coefficients constants

$$(H-c) \quad x' = Ax,$$

où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Par le lemme 8.1, (H-c) est stable si et seulement si elle est uniformément stable.

Alors le théorème suivant est une conséquence directe des théorèmes 8.1 et 7.1, et du corollaire 7.2.

Théorème 8.2 : Soit λ_k ($k=1, \dots, n$) les valeurs propres de A . On a alors les résultats suivants :

(a) $(H-c)$ est uniformément stable ssi

$\operatorname{Re} \lambda_k \leq 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}$ et $\operatorname{Re} \lambda_k = 0$ uniquement pour λ_k dans le bloc diagonal de Jordan de A ;

(b) $(H-c)$ est asymptotiquement stable ssi

$\operatorname{Re} \lambda_k < 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}$.

(c) $(H-c)$ est instable ssi $\exists k \in \{1, \dots, n\}$ tel que soit $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$, soit $\operatorname{Re} \lambda_k = 0$ et λ_k n'est pas dans le bloc diagonal de Jordan de A .